3.3.1 Komplexe Zahlen. Übersicht und Rechenregeln

- Imaginäre Einheit $\mathbf{j}^2 = -1$
- Komplexe Zahl $\underline{z}$

  Allgemeine Form $\underline{z} = x + \mathrm{j}y$

$\mathbf{j}$ = in der Technik verwendete imaginäre Einheit

z “Komplexe Zahl“

$\underline{z}$ Standardisierte Kennzeichnung der komplexen Zahl in der Technik

$\mathrm{Re}\{\underline{z}\} = x$ (reeller) ***Real***teil von $\underline{z}$

$\mathrm{Im}\{\underline{z}\} = y$ (reeller) ***Imaginär***teil von $\underline{z}$

- Darstellungsformen

Kartesische Form: $\underline{z} = x + \mathrm{j}y$ Realteil: $\mathrm{Re}\{\underline{z}\} = x = r \cdot \cos\varphi$

Imaginärteil: $\mathrm{Im}\{\underline{z}\} = y = r \cdot \sin\varphi$

Polarform: $\underline{z} = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ Betrag: $r = |\underline{z}| = +\sqrt{x^2 + y^2}$

(Exponentialform)

Eulersche Form: $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi$

Polarwinkel φ (*Argument* oder *Arcus*) von $\underline{z}$

Man beachte den Hauptwert des arctan!

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & x > 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & x < 0,\ y > 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi & x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} +\arccos\dfrac{x}{|\underline{z}|} & y \geq 0 \\ -\arccos\dfrac{x}{|\underline{z}|} & y < 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \mathrm{Im}\{\ln(\underline{z})\}$$

beachte: $\arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$

- Wichtige Rechenregeln

Kehrwert d. imaginären Einheit $1/\mathbf{j} = -\mathbf{j}$

Konjugiert komplexe Zahl $\underline{z}^*$ $\underline{z} = x + \mathbf{j}y = r\mathrm{e}^{\mathbf{j}\varphi}$ $\underline{z}^* = x - \mathbf{j}y = r\mathrm{e}^{-\mathbf{j}\varphi}$

Addition $\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathbf{j}(y_1 \pm y_2)$

Multiplikation $\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathbf{j}(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

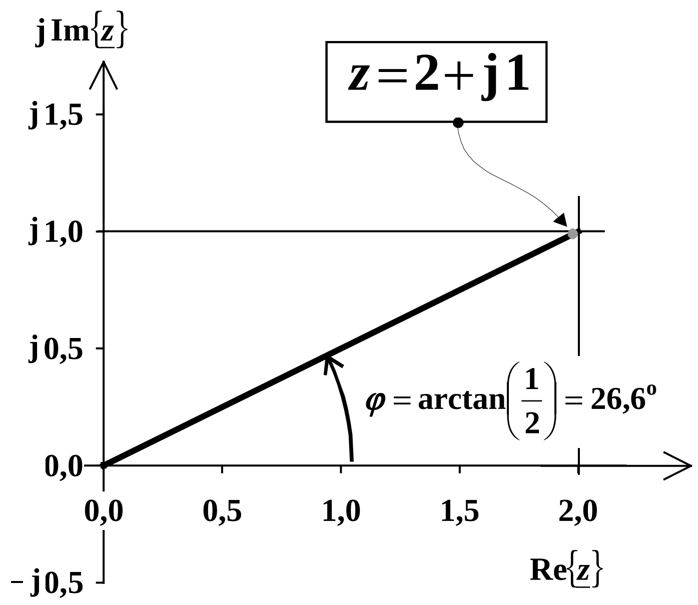
Betrag $|\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2|$

Division $$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{x_1 + \mathbf{j}y_1}{x_2 + \mathbf{j}y_2} = \frac{|\underline{z}_1|\mathrm{e}^{\mathbf{j}\varphi_1}}{|\underline{z}_2|\mathrm{e}^{\mathbf{j}\varphi_2}} = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|} \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{j}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Betrag $$\left|\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}$$

konjugiert komplexe Erweiterung $$\frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{x + \mathbf{j}y} \frac{\cdot (x - \mathbf{j}y)}{\cdot (x - \mathbf{j}y)} = \frac{(x - \mathbf{j}y)}{x^2 + y^2}$$

Darstellung der Kreisfunktionen in der Polar- bzw. Exponentialform $$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{j}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathbf{j}\varphi}\right); \quad \sin\varphi = \frac{1}{2\mathbf{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{j}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathbf{j}\varphi}\right)$$



Zur Veranschaulichung werden die komplexen Zahlen in der ***komplexen Ebene*** (*Gaußsche Zahlenebene*) abgebildet.

In der angegebenen Abbildung ↑ ist die komplexe Zahl

$$\underline{z} = 2 + \mathbf{j}1$$

als Beispiel dargestellt. Der Realteil von $\underline{z}$ ist **2**; der Imaginärteil von $\underline{z}$ ist **1**.